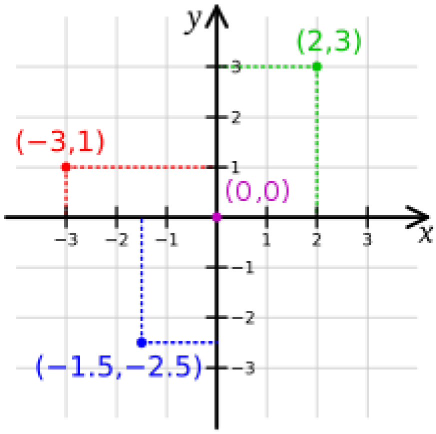
WIKIPEDIA

Coordenadas cartesianas

Las **coordenadas cartesianas** o **coordenadas rectangulares** (sistema cartesiano) son un tipo de coordenadas ortogonales usadas en espacios euclídeos, para la representación gráfica de una relación matemática (funciones matemáticas y ecuaciones de geometría analítica), o del movimiento o posición en física, caracterizadas por tener como referencia ejes ortogonales entre sí que concurren en el punto origen. En las coordenadas cartesianas se determinan las coordenadas al origen como la longitud de cada una de las proyecciones ortogonales de un punto dado sobre cada uno de los ejes. La denominación de 'cartesiano' se introdujo en honor de René Descartes, quien las utilizó por primera vez de manera formal.



Tres ejemplos de coordenadas asignadas a tres puntos diferentes (verde, rojo y azul), sus proyecciones ortogonales sobre los ejes constituyen sus coordenadas cartesianas y el origen de coordenadas (0,0) en magenta.

El sistema en sí es un sistema bidimensional, que se denomina **plano cartesiano**. El punto de intersección de las rectas, por definición, considera como el punto cero de las rectas y se conoce como origen de coordenadas. Al eje horizontal o de las abscisas se le asigna los números reales de las equis ("x"); y al eje vertical o de las ordenadas se le asignan los números reales de las yes ("y"). Al cortarse las dos rectas, dividen al plano en cuatro regiones o zonas, que se conocen con el nombre de cuadrantes:

- Primer cuadrante "I": Región superior derecha
- Segundo cuadrante "II": Región superior izquierda
- Tercer cuadrante "III": Región inferior izquierda
- Cuarto cuadrante "IV": Región inferior derecha

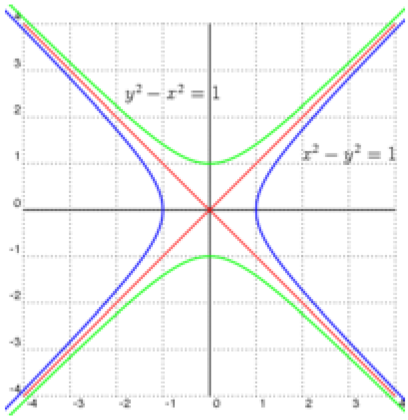
El plano cartesiano se utiliza para asignarle una ubicación a cualquier punto en el plano. En la gráfica se indica el punto +2 en las abscisas y +3 en las ordenadas. El conjunto (2 , 3) se denomina "par ordenado" y del mismo modo se pueden ubicar otros puntos.

Las coordenadas cartesianas se usan por ejemplo para definir un **sistema cartesiano** o sistema de referencia respecto ya sea a un solo eje (línea recta), respecto a dos ejes (un plano) o respecto a tres ejes (en el espacio), perpendiculares entre sí (plano y espacio), que se cortan en un punto llamado *origen de coordenadas*. En el plano, las coordenadas cartesianas se denominan **abscisa** y **ordenada**. La abscisa es la coordenada horizontal y se representa habitualmente por la letra **x**, mientras que la ordenada es la coordenada vertical y se representa por la **y**.

Índice

Enlaces externos

Historia



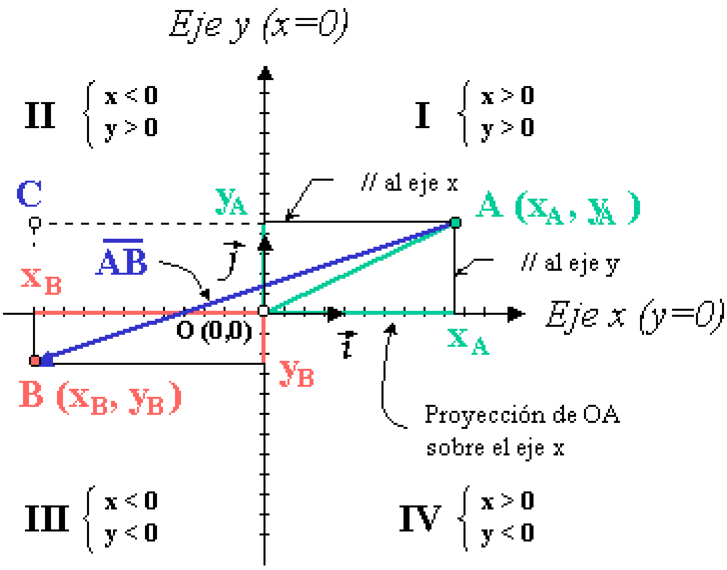
Gráfica de dos hipérbolas y sus asíntotas.

Se denominan **coordenadas cartesianas** en honor a René Descartes (1596-1650), el célebre filósofo y matemático francés que quiso fundamentar su pensamiento filosófico en el método de tomar un «punto de partida» evidente sobre el que edificaría todo el conocimiento.

Como creador de la geometría analítica, Descartes también comenzó tomando un «punto de partida» en esta disciplina, el sistema de referencia cartesiano, para poder representar la geometría plana, que usa sólo dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto denominado «origen de coordenadas».

Plano cartesiano

Con un sistema de referencia conformado por dos rectas perpendiculares que se cortan en el origen , cada punto del plano puede "nombrarse" mediante dos números: (x, y), que son las coordenadas del punto, llamadas *abscisa* y *ordenada*, respectivamente, que son las distancias ortogonales de dicho punto respecto a los ejes cartesianos.



Sistema de coordenadas cartesianas.

La *ecuación* del eje x es $y = 0$, y la del eje y es $x = 0$, rectas que se cortan en el origen O, cuyas coordenadas son $(0, 0)$.

Se denomina también *eje de las abscisas* al eje x, y *eje de las ordenadas* al eje y. Los ejes dividen el espacio en cuatro cuadrantes I, II, III y IV, en los que los signos de las coordenadas alternan de positivo a negativo (por ejemplo, las dos coordenadas del punto A serán positivas, mientras que las del punto B serán ambas negativas).

Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones del segmento entre el origen y el punto sobre cada uno de los ejes.

Sobre cada uno de los ejes se definen **vectores unitarios** (**i** y **j**) como aquellos paralelos a los ejes y de módulo (longitud) la unidad. En forma vectorial, la posición del punto A se define respecto del origen con las componentes del vecto **OA**.

$$\overline{OA} = x_A\,\mathbf{i} + y_A\,\mathbf{j}$$

La posición del punto **A** será:

$$A = (x_A,\, y_A)$$

Nótese que la lista de coordenadas puede expresar tanto la posición de un punto como las componentes de un vector en notación matricial.

La distancia entre dos puntos cualesquiera vendrá dada por la expresión:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC.

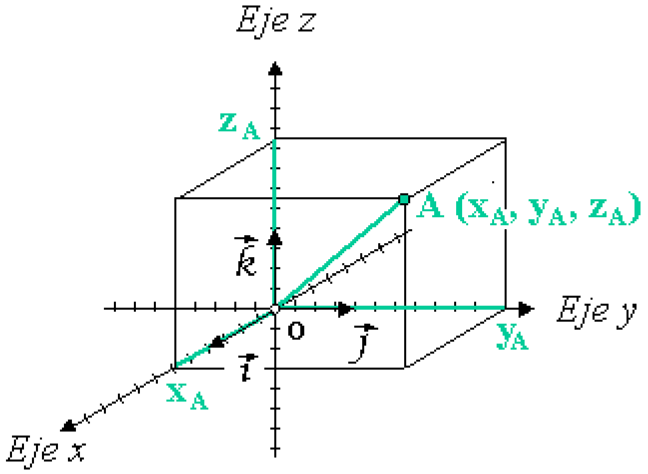
Un vector cualquiera **AB** se definirá restando, coordenada a coordenada, las del punto de origen de las del punto de destino:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j}$$

Evidentemente, el módulo del vector AB será la distancia d_{AB} entre los puntos A y B antes calculada.

Espacio euclídeo

Si tenemos un sistema de referencia formado por tres rectas perpendiculares entre sí (X, Y, Z), que se cortan en el origen (0, 0, 0), cada punto del espacio puede *nombrarse* mediante tres números: (x, y z), denominados *coordenadas del punto*, que son las distancias ortogonales a los tres planos principales: los que contienen las parejas de ejes YZ, XZ e YX, respectivamente.



Sistema de Coordenadas Cartesianas Espaciales

Los planos de referencia XY (z = 0); XZ (y = 0); e YZ (x = 0) dividen el espacio en ocho cuadrantes en los que, como en el caso anterior, los signos de las coordenadas pueden ser positivos o negativos.

La generalización de las relaciones anteriores al caso espacial es inmediata considerando que ahora es necesaria una tercera coordenada (z) para definir la posición del punto.

$$\overline{OA} = x_A\,\mathbf{i} + y_A\,\mathbf{j} + z_A\,\mathbf{k}$$

Las coordenadas del punto **A** serán:

$$A = (x_A,\, y_A,\, z_A)$$

y el **B**:

$$B = (x_B,\, y_B,\, z_B)$$

La distancia entre los puntos **A** y **B** será:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

El segmento **AB** será:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k}$$

Cambio del sistema de coordenadas

Tanto en el caso plano como en el caso espacial pueden considerarse tres transformaciones elementales: traslación del origen, rotación alrededor de un eje y escalado.

Traslación del origen

Suponiendo un sistema de coordenadas inicial **S1** con origen en **O** y ejes **x** e **y**

$$S1 = \{O;\ x, y\}$$

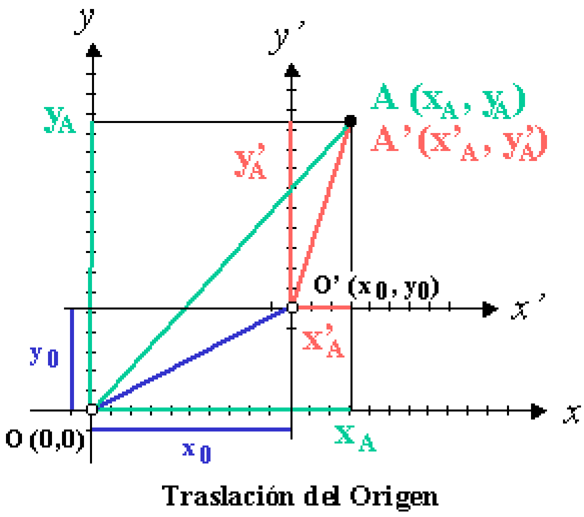
y las coordenadas de un punto **A** dado, sean en el sistema **S1**:

$$A = (x_A,\ y_A)$$

dado un segundo sistema de referencia **S2**

$$S2 = \{O';\ x', y'\}$$

Siendo los centros de coordenadas de los sistemas **0** y **0´**, puntos distintos, y los ejes **x**, **x´**; e **y**, **y´** paralelos dos a dos, y las coordenadas de **O´**, respecto a **S1**:



Traslación del origen en coordenadas cartesianas.

$$O' = (x_{O'},\ y_{O'})$$

Se dice **traslación del origen**, a calcular las coordenadas de **A** en **S2**, según los datos anteriores, que llamaremos:

$$A' = (x'_A,\ y'_A)$$

Dados los puntos **O**, **O´** y **A**, tenemos la suma de vectores:

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$$

despejando

$$\overline{O'A} = \overline{OA} - \overline{OO'}$$

Lo que es lo mismo que:

$$(x'_A,\ y'_A) = (x_A,\ y_A) - (x_{O'},\ y_{O'})$$

Separando los vectores por coordenadas:

$$x'_A = x_A - x_{O'}$$
$$y'_A = y_A - y_{O'}$$

y ampliándolo a tres dimensiones:

$$z'_A = z_A - z_{O'}$$

Rotación alrededor del origen

Dado un sistema de coordenadas en el plano **S₁** con origen en **O** y ejes **x** e **y**:

$$S_1 = \{O;\ x, y\}$$

y una base ortonormal de este sistema:

$$B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$$

Un punto **A** del plano se representará en este sistema según sus coordenadas:

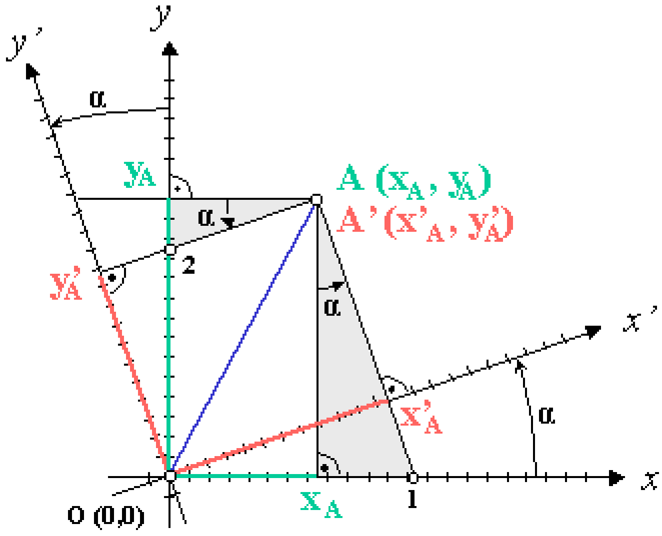
$$\mathbf{A} = x_A\, \mathbf{i} + y_A\, \mathbf{j}$$

Para un segundo sistema $\mathbf{S_2}$ de referencia girado un ángulo α, respecto al primero:

$$S_2 = \{O;\ x', y'\}$$

y con una base ortonormal:

$$\mathbf{B}_2 = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$$



Rotación alrededor del origen en coordenadas cartesianas.

Al cálculo de las coordenadas del punto **A**, respecto a este segundo sistema de referencia, girado respecto al primero, se llama *rotación alrededor del origen*, siendo su representación:

$$\mathbf{A}' = x'_A\, \mathbf{i}' + y'_A\, \mathbf{j}'$$

Hay que tener en cuenta que el punto $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ son el mismo punto, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$; se emplea una denominación u otra para indicar el sistema de referencia empleado. El valor de las coordenadas respecto a uno u otro sistema, sí son diferentes, y es lo que se pretende calcular.

La representación de B_1 en B_2 es:

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \cos\alpha\, \mathbf{i}' - \sin\alpha\, \mathbf{j}' \\ \mathbf{j} &= \sin\alpha\, \mathbf{i}' + \cos\alpha\, \mathbf{j}'\end{aligned}$$

Dado que el punto **A** en B1 es:

$$\mathbf{A} = x_A\, \mathbf{i} + y_A\, \mathbf{j}$$

con la transformación anterior tenemos:

$$\mathbf{A} = x_A\, (\cos\alpha\, \mathbf{i}' - \sin\alpha\, \mathbf{j}') + y_A\, (\sin\alpha\, \mathbf{i}' + \cos\alpha\, \mathbf{j}')$$

Y, deshaciendo los paréntesis:

$$\mathbf{A} = x_A\, \cos\alpha\, \mathbf{i}' - x_A\, \sin\alpha\, \mathbf{j}' + y_A\, \sin\alpha\, \mathbf{i}' + y_A\, \cos\alpha\, \mathbf{j}'$$

reordenando:

$$\mathbf{A} = (x_A\, \cos\alpha + y_A\, \sin\alpha)\, \mathbf{i}' + (-x_A\, \sin\alpha + y_A\, \cos\alpha)\, \mathbf{j}'$$

Como:

$$\mathbf{A} \equiv A';$$

Tenemos que:

$$\mathbf{A}' = (x_A \; \cos\alpha + y_A \; \sin\alpha)\,\mathbf{i}' + (-x_A \; \sin\alpha + y_A \; \cos\alpha)\,\mathbf{j}'$$

Como sabíamos:

$$\mathbf{A}' = x'_A \, \mathbf{i}' + y'_A \, \mathbf{j}'$$

Por identificación de términos:

$$\begin{array}{rl} x'_A = & x_A \; \cos\alpha + y_A \; \sin\alpha \\ y'_A = & -x_A \; \sin\alpha + y_A \; \cos\alpha \end{array}$$

Que son las coordenadas de $\mathbf{A}$ en B_2, en función de las coordenadas de $\mathbf{A}$ en B_1 y de α .

Escalado

Sea un punto con coordenadas (x,y) en el plano. Si se cambia la escala de ambos ejes en un factor λ, las coordenadas de dicho punto en el nuevo sistema de coordenadas pasarán a ser:

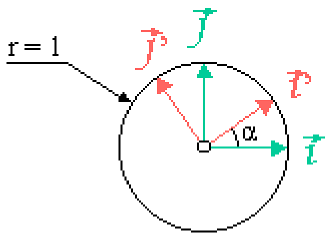
$$(x', y') = (\lambda x, \lambda y)$$

El factor de escala λ no necesariamente debe ser el mismo para ambos ejes.

Cálculo matricial

Siendo [T] la **matriz de transformación** y cuyas filas son igualmente las componentes de los vectores unitarios **i** ' y **j** ' respecto de los originales **i** y **j**, o si se prefiere, cuyas columnas son las componentes de los vectores unitarios originales en el sistema de referencia rotado.

$$\begin{array}{l} \mathbf{i'} = \;\; \cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j} \\ \mathbf{j'} = -\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j} \end{array} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{i'} \\ \mathbf{j'} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix}$$



Nota: *Las magnitudes vectoriales están en negrita*

Véase también

- Cuadrante (geometría)
- Anamorfosis
- Base
- Base canónica
- Base ortogonal
- Base ortonormal
- Coordenadas polares
- Combinación lineal
- Espacio vectorial

- Geodésica
- Independencia lineal
- Producto escalar
- Producto mixto
- Producto tensorial
- Producto vectorial
- Sistema generador
- Topología

Referencias

- «Cartesian Coordinate System». *Cut the knot* (en inglés).
- Weisstein, Eric W. «Sistema de coordenadas». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- Weisstein, Eric W. «Coordenadas cartesianas». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

Enlaces externos

- Coordenadas cartesianas, explicación interactiva (requiere java)
- Proyecto didáctico para introducción al plano cartesiano en lenguaje de programación Logo.