Sucesiones numéricas. Progresiones

Una **sucesión numérica** es un conjunto ordenado de números. Cada uno de ellos es denominado término (también elemento o miembro) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la longitud de la sucesión.

Sumario

Sucesión de números reales

Es una aplicación del conjunto N de los números naturales en el conjunto R de los números reales.

Ejemplos

1. 1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6,...,
2. 5, 8,11,14,17,...,
3. 1,1,2,3,5,8,13,21,...,
4. 0,1,0,1,0,...,

Término general de una sucesión Se denomina término general de una sucesión, S, simbolizado como S_n, a la expresión que representa cualquier término de esta. Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $S_m = f(m)$ en la cual, dándole a (m) un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Términos generales

Como término general de la sucesión 1., se tiene: $s_m = \frac{(-1)^m}{m}$
La sucesión 2 es una progresión aritmética de razón 3, primer término 5.
$S_m = 5 + (m-1)3$

Para la sucesión 3., va su término general: $s_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$

[1]

la sucesión 4., tiene el siguiente término general: $s_m = (1+(-1)^m)/2$

Construcción recursiva de sucesiones

Las sucesiones cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se denominan **sucesiones recursivas**, además se señalan los valores de los primeros términos (o el primero) que se dan ya determinados.

Ejemplos

La sucesión de Fibonacci: $a_{m+2} = a_{m+1} + a_m$, m=1,2..., $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$b_{m+2} = 3b_{m+1} - 2b_m$, $b_1 = 2$, $b_2 = -1$; m= 1,2,..., [2]

Progresiones aritméticas

Definición

Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término se obtiene del anterior sumando una cantidad.

Los términos de las progresiones aritméticas los podemos representar de la siguiente forma:

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d\ldots$

Aquí, *a* es el término inicial y *d* es la diferencia común sucesiva.

Obtención del término general

El término general a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene de la siguiente forma: Para pasar de a_1 a a_n tenemos que dar n-1 pasos de amplitud d. Por lo tanto: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Suma de los términos de una progresión aritmética

suma

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética de diferencia d es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ejemplos

Sea $a_1 = 4 \; y \; d = 3$ La sucesión sería:

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$$

$$S_5 = 4 + (4+3) + (4+2 \cdot 3) + (4+3 \cdot 3) + (4+4 \cdot 3)$$

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(4 + (4+4 \cdot 3)) \cdot 5}{2} = \frac{20 \cdot 5}{2} = 50$$

Progresiones geométricas

Definición

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene del anterior multiplicando una cantidad fija (positiva, negativa o cero), llamada *razón común*, que se suele denotar por *r*

Obtención del término general

El término general a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene razonando de esta manera: Para pasar de a_1 a a_n tenemos que dar n-1 pasos, consistiendo cada paso en multiplicar el término por r. Por lo tanto: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Suma de los términos de una progresión geométrica

La suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r es: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

Suma de los términos de una progresión geométrica con $r<1$

La suma de todos los términos de una progresión geométrica en la que su razón verifica $0<r<1$ se expresa como $S_{n\to\infty}$ y se obtiene así: $S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-r}$

Ejemplos

Sea a_1=5 y r=0.8

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_3 = 5 + 5 \cdot 0.8 + 5 \cdot 0.8^2$$
$$S_3 = \frac{5(1-0.8^3)}{1-0.8}$$
$$S_3 = 12.2$$

por otro lado, si prolongamos la suma hasta el infinito

$$S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-0.8}$$
$$S_{n\to\infty} = 25$$

Referencias y notas

1. Generalmente se presenta en forma recursiva
2. Lages Lima: Análisis matemático,