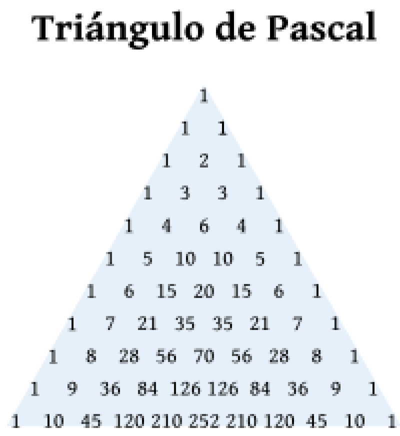
WIKIPEDIA

Triángulo de Pascal

En las matemáticas, el **triángulo de Pascal** es una representación de los coeficientes binomiales ordenados en forma de triángulo. Es llamado así en honor al filósofo y matemático francés Blaise Pascal, quien introdujo esta notación en 1654, en su ***Traité du triangle arithmétique***.[1] Si bien las propiedades y aplicaciones del triángulo fueron conocidas con anterioridad al tratado de Pascal por matemáticos indios, chinos, persas, alemanes e italianos, fue Pascal quien desarrolló muchas de sus aplicaciones y el primero en organizar la información de manera conjunta.[2]



Triángulo de Pascal para *n=10*.

El triángulo de Pascal se puede generalizar a dimensiones mayores. La versión de tres dimensiones se llama *pirámide de Pascal* o *tetraedro de Pascal*, mientras que las versiones más generales son llamadas *simplex de Pascal*.

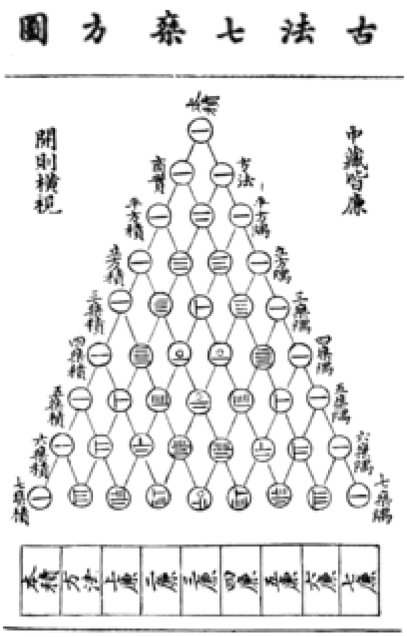
Índice

Historia

La primera representación explícita de un triángulo de coeficientes binomiales data del siglo X, en los comentarios de los *Chandas Shastra*, un libro antiguo indio de prosodia del sánscrito escrito por Pingala alrededor del año 200 a.C.[3]

Las propiedades del triángulo fueron discutidas por los matemáticos persas Al-Karaji (953–1029)[4] y Omar Khayyám (1048–1131); de aquí que en Irán sea conocido como el *triángulo Khayyam-Pascal* o simplemente el *triángulo Khayyam*. Se conocían también muchos teoremas relacionados, incluyendo el teorema del binomio.

En China, este triángulo era conocido desde el siglo XI por el matemático chino Jia Xian (1010–1070). En el siglo XIII, Yang Hui (1238–1298) presenta el *triángulo aritmético*, equivalente al triángulo de Pascal, de aquí que en China se le llame ***triángulo de Yang Hui***.[5] [6] [7] [8]



Triángulo aritmético chino.

Petrus Apianus (1495–1552) publicó el triángulo en el frontispicio de su libro sobre cálculos comerciales *Rechnung*[9] (1527). Este es el primer registro del triángulo en Europa. En Italia, se le conoce como el ***triángulo de Tartaglia***, en honor al algebrista italiano Niccolò Fontana Tartaglia (1500–77). También fue estudiado por Michael Stifel (1486 - 1567)[10] y François Viète (1540-1603).

En el *Traité du triangle arithmétique* (*Tratado del triángulo aritmético*) publicado en 1654, Blaise Pascal reúne varios resultados ya conocidos sobre el triángulo, y los emplea para resolver problemas ligados a la teoría de la probabilidad; demuestra 19 de sus propiedades, deducidas en parte de la definición combinatoria de los coeficientes. Algunas de estas propiedades eran ya conocidas y admitidas, pero sin demostración. Para demostrarlas, Pascal pone en práctica una versión acabada de inducción matemática. Demuestra la relación entre el triángulo y la fórmula del binomio. Fue bautizado ***Triángulo de Pascal*** por Pierre Raymond de Montmort (1708) quien lo llamó: *Tabla del Sr. Pascal para las combinaciones*, y por Abraham de Moivre (1730) quien lo llamó: "Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM" (del latín: "Triángulo aritmético de Pascal"), que se convirtió en el nombre occidental moderno.[11]

Construcción

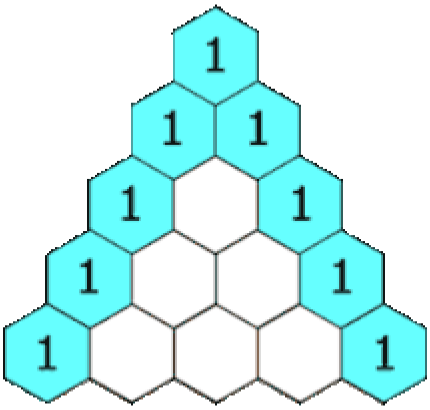
El triángulo de Pascal se construye siguiendo un patrón como el que se muestra en la figura de abajo. Se comienza desde la cúspide con el número «1» hacia abajo(infinito), a modo de "árbol"; se clasifica en filas, empezando por la fila cero(el «1» de la cúspide). Este "árbol" tiene nodos, que son cada número que compone el triángulo. Si sumamos dos nodos nos dará de resultado el nodo situado debajo de estos dos, y así sucesivamente.

Las diagonales que empiezan desde el «1» situado en la cabeza del triángulo valen siempre 1.

Uso general

Este triángulo fue ideado para desarrollar las potencias de binomios. Las potencias de binomios vienen dadas por la fórmula: $(a+b)^n$, dónde a y b son variables cualesquiera y *n* el exponente que define la potencia. Esta expresión se denomina binomio de Newton.

Esta fórmula del binomio de Newton desarrolla los coeficientes de cada fila en el triángulo de Pascal. Es por esto que existe una estrecha relación entre *el triángulo de Pascal* y *los binomios de Newton*.



Cada número en el triángulo es la suma de los **dos** que están situados por encima de él.

Vínculo entre el triángulo de Pascal y el binomio de Newton

Todas las cifras escritas en cada fila del triángulo corresponden a los coeficientes del desarrollo de las potencias del binomio de Newton. Unos ejemplos de la serie que describe este comportamiento son:

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$\dots$$

Con estos ejemplos se concluye que la serie de la expresión general que los desarrolla es:

$$(a+b)^n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 \dots + b^n$$

De esta forma, los coeficientes desarrollados de la forma $(a+b)^n$ se encuentran en la fila «n+1» del Triángulo de Pascal.

También se puede generalizar este resultado para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ por inducción matemática.

Si a cada nodo de este triángulo en cada fila lo denominamos *z*, nos quedaría la serie que describe la expresión general del modo:

$$(a+b)^n = z_1 a^n + z_2 a^{n-1}b + z_3 a^{n-2}b^2 \dots + z_n b^n$$

En esta serie $z \in \mathbb{N}$, dónde *z* va desde 1 hasta *n*.

Combinatoria en el triángulo de Pascal

La construcción del triángulo está relacionada con los coeficientes binomiales según la fórmula (también llamada *regla de Pascal*) combinatoria. Esta fórmula o regla explica que los coeficientes (nodos del "árbol") de una fila dada del triángulo, se pueden calcular con la fórmula combinatoria de combinaciones de n elementos de k en k; expresado matemáticamente: $\binom{n}{k}$, dónde n es la *fila - 1* y k la posición en la fila.

Todo esta propuesta de correlato entre combinatoria y el triángulo de Pascal viene dada por la regla general antes mencionada:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \textbf{para todo} \quad 0 \leq k \leq n; \quad n, k \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, para el binomio $(a+b)^3$, tendríamos lo siguiente:

- Quedarían cuatro nodos (elementos compuestos por *a*, *b* y coeficiente correspondientes) en la ecuación desarrollada del binomio, número el cual se refiere a la fila en la que se encuentra:

$$(a+b)^3 = \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$$

- Si expresamos los coeficientes del triángulo de la forma combinatoria quedaría lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \leftarrow & \textbf{fila correspondiente a } (a+b)^3
\end{array}$$

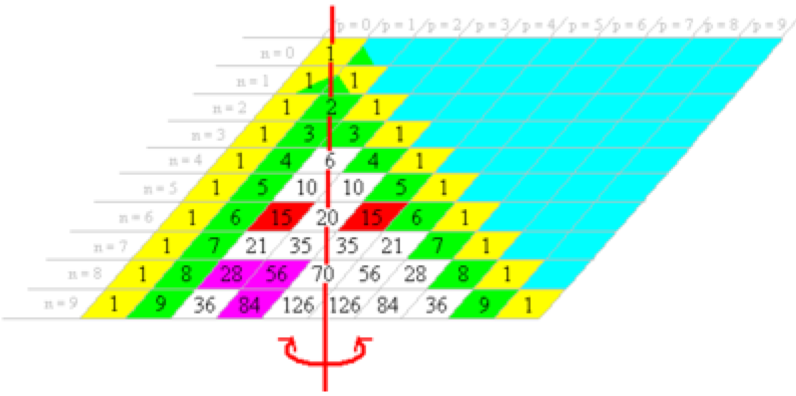
- Cuyo triángulo correspondiente sería:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 & \leftarrow & \textbf{fila correspondiente a } (a+b)^3
\end{array}$$

Propiedades

Una vez sentadas las bases del intrínseco correlato existente entre estos dos campos de las matemáticas, véanse las propiedades de estos.

Esta imagen representa el triángulo de Pascal matricialmente, y además aplicable a combinatoria. Cada uno de los valores de un triángulo de Pascal escritos en forma de tabla corresponden a un coeficiente de la expansión de una potencia de sumas. Concretamente, el número de la fila *n* y la columna *p*, corresponde a $\binom{n}{p}$, o también denotado como $\mathbf{C}_n^p$ (**C** por "combinación") y se dice *«n sobre p»*, *«combinación de n en p»* o *«coeficiente binomial n, p»*. Las casillas vacías corresponden a valores nulos (**0**). Usando las propiedades de los coeficientes binomiales, se pueden obtener las siguientes propiedades de cualquier triángulo de Pascal con todo rigor:



Triángulo de Pascal con algunas casillas coloreadas. Se puede observar como se distribuyen los valores simétricamente alrededor del eje vertical. Los valores de las casillas de ambos lados (en amarillo, verde y rojo) tienen el mismo valor debido a la propiedad de simetría $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$. Las casillas exteriores (en azul), tienen valor nulo, y las casillas en violeta, proporcionan un ejemplo de la regla de Pascal.

- Los valores de cada fila del triángulo guardan simetría respecto al eje vertical imaginario del mismo, debido a que $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
- Los valores correspondientes a la zona fuera del triángulo tienen valor **0**, puesto que $\binom{n}{p} = 0$ cuando $p > n$.
- Y claro, la regla de Pascal de construcción del triángulo da la relación fundamental de los coeficientes binomiales $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Una consecuencia interesante del triángulo de Pascal es que la suma de todos los valores de una fila cualquiera del triángulo es una potencia de 2. Esto es debido a que, por el teorema del binomio, la expansión de la *n*-potencia de $(1+1)^n = 2^n$ es

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

que corresponde precisamente con la suma de todos los valores de la *n*-ésima fila de un triángulo de Pascal.

Otras interpretaciones o representaciones

Triángulo rectángulo

La ilustración al comienzo del artículo muestra el triángulo de Pascal dibujado como un triángulo equilátero. Es posible «enderezarlo» de tal forma que su dibujo quede como un triángulo rectángulo. De esta forma, a la izquierda queda una columna de números «1». La siguiente columna deja un lugar vacío en la primera fila y sigue con la sucesión de números naturales: $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ La tercera columna deja dos filas vacías y comienza con la sucesión de los números triangulares: $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ Dibujado de esta manera es fácil ver que:

- Cada número en una columna cualquiera es igual a la suma parcial de los elementos de la columna anterior (a la izquierda) hasta la fila anterior en orden descendente.
- La tercera columna es la sucesión de los números triangulares; la cuarta, la de los números tetraédricos; la quinta, la de los números pentaédricos, y así sucesivamente.

Potencias en base 2

También se pueden encontrar las potencias en base 2 de la forma $2^n,\ n \in \mathbb{N}$ como las sumas sucesivas de los coeficientes de las filas, siendo *n* la fila en la que se encuentra la potencia 2^n:

$$2^0 = 1$$

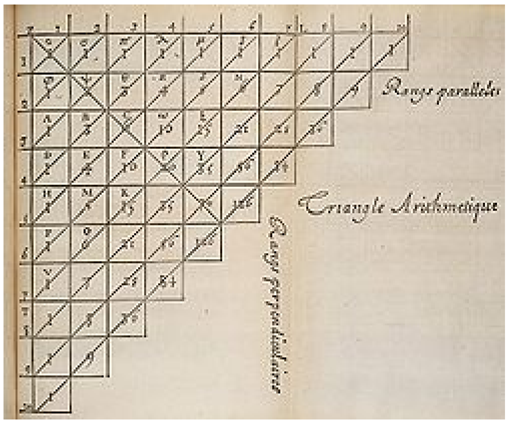
$$2^1 = 1+1$$

$$2^2 = 1+2+1$$

$$2^3 = 1+3+3+1$$

$$2^4 = 1+4+6+4+1$$

$$\ldots$$

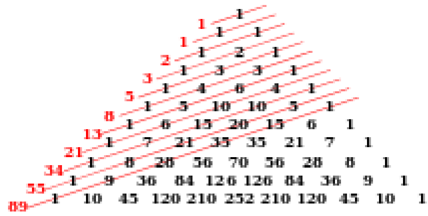


Triángulo de Pascal en el escrito original de Pascal.

Sucesión de Fibonacci

En el triángulo de Pascal se puede apreciar una relación entre un modo de sumar las diagonales y la sucesión de Fibonacci. Los primeros términos de esta sucesión son: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \ldots$

Como se puede apreciar en la imagen de la derecha, las sumas sucesivas de las diagonales desde arriba a la derecha hacia abajo a la izquierda componen la sucesión de Fibonacci.


Relación entre el triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci

Números primos

Existe una propiedad sobre el triángulo de Pascal que indica que si el primer elemento de una fila(sin contar los «1») es un número primo, todos los demás de la fila serán divisibles por el.

Ejemplo:

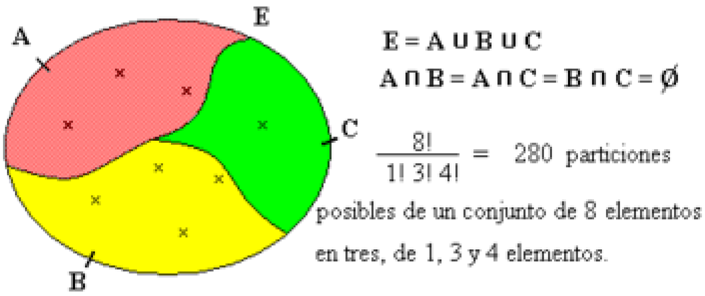
$$\text{En la fila } 11 \rightarrow 1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \quad 330 \quad 462 \quad 462 \quad 330 \quad 165 \quad 55 \quad 1\ ;$$

El 55, 165, 330 y 462 son divisibles por 11.

Generalizaciones

En vez de considerar las potencias de *a* + *b*, se puede considerar las del trinomio *a* + *b* + *c*. De esta manera, $(a+b+c)^n$ es una suma de monomios de la forma $\lambda_{p,\,q,\,r} \cdot a^p \cdot b^q \cdot c^r$, con *p*, *q* y *r* positivos, $p + q + r = n$, y $\lambda_{p,\,q,\,r}$ un número natural que se llama *coeficiente trinomial*.[12] [13] Los cálculos son similares a los del coeficiente binomial, y se dan mediante la siguiente expresión:

$$\lambda_{p,q,r} = \binom{n}{p,q,r} = \frac{n!}{p!q!r!},$$



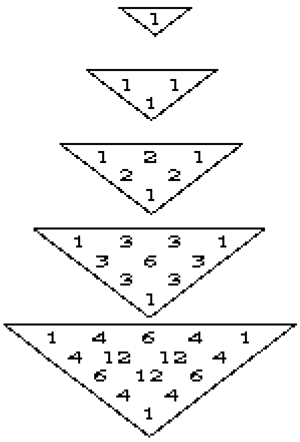
Ejemplo combinacional de coeficiente trinomial.

en subconjuntos de *p*, *q* y *r* elementos.

Estos coeficientes se pueden considerar como la analogía tridimensional del triángulo de Pascal. De hecho, a la distribución de estos coeficientes al estilo piramidal se le conoce como *pirámide de Pascal*; es también infinita, con secciones triangulares, y el valor en cada casilla es la suma de los valores de las tres casillas encima de ella.

En esta pirámide se observa una invariante por rotación de 120 grados alrededor de un eje vertical que pasa por el vértice. El triángulo de Pascal aparece en las tres caras de la pirámide.

De igual manera, todo esto se puede generalizar a dimensiones finitas cualesquiera, pero sin la posibilidad de hacer dibujos explicativos sencillos.



Pirámide de Pascal. Se han dibujado las primeras secciones a partir de la cumbre.

Véase también

- Coeficiente binomial
- Teorema del binomio
- Triángulo de Floyd

Notas y referencias

1. *TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE*.
2. .Peter Fox (1998). *Cambridge University Library: the great collections* (http://books.google.com/books?id=xxlgKP5thL8C&pg=PA13). Cambridge University Press. p. 13. ISBN 978-0-521-62647-7.
3. A. W. F. Edwards. *Pascal's arithmetical triangle: the story of a mathematical idea.* JHU Press, 2002, pp. 30–31.
4. O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., «Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html)» (en inglés), *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html.
5. Weisstein, Eric W. (2003). *CRC concise encyclopedia of mathematics*, p.2169. ISBN 978-1-58488-347-0.
6. Hemenway, Priya (2008). *El Código Secreto*. Evergreen.
7. Fowler, David (enero de 1996). «The Binomial Coefficient Function». *The American Mathematical Monthly* **103** (1): 1-17. JSTOR 2975209 (https://www.jstor.org/stable/2975209). doi:10.2307/2975209 (http://dx.doi.org/10.2307%2F2975209).
8. (en inglés) V. J. Katz, *A History Of Mathematics: An Introduction*, 1992 (de *Binomial Theorem and the Pascal Triangle (https://web.archive.org/web/20080705013436/http://www.roma.unisa.edu.au/07305/pascal.htm)*, UniSA)
9. Site de Gérard Vilemin (http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Iteration/TrgPasc2.htm#TrgPas)
10. Henri Bosmans, Nota histórica sobre el triángulo aritmético (http://logica.ugent.be/albrecht/math/bosmans/R079.pdf) — PDF
11. (Fowler, 1996, p. 11)
12. Harris, John; Hirst, Jeffry L.; Mossinghoff, Michael (2008). «2.3. Multinomial coefficients». *Combinatorics and Graph Theory* (en inglés) (2ª edición). New York (USA): Springer. pp. 145-147. ISBN 0387797106.
13. Weisstein, Eric W. «Trinomial Coefficient» (http://mathworld.wolfram.com/TrinomialCoefficient.html). En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga una categoría multimedia sobre **Triángulo de Pascal**.
- Weisstein, Eric W. «Pascal's triangle» (http://mathworld.wolfram.com/PascalsTriangle.html). En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
-